Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων – Θ. Μετρου (Μεταπτ.)

Τριτο διαγωνισμα

Τρίτη, 2/2/2010

1. Αποδείξτε τη συνέχεια στο χώρο $L^1(\mathbb{R})$ της μετατόπισης: αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε

$$\lim_{h\to 0} \int |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0.$$

2. Χρησιμοποιείστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης σε κάποιο κατάλληλο χώρο μέτρου για να δειξετε το εξής: αν είναι $a_{m,n}, b_n, c_n \in \mathbb{R}$, $m, n = 1, 2, \ldots$, για κάθε n έχουμε $\lim_m a_{m,n} = b_n$ και $|a_{m,n}| \le c_n$ και $\sum_n c_n < \infty$ τότε έχουμε $\sum_n |b_n| < \infty$ και

$$\sum_n b_n = \lim_m \sum_n a_{m,n}.$$

3. Αν m_1, m_2 είναι τα μέτρα Lebesgue στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε τα Borel μέτρα α, β στο $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha(A) = m_1\{x : \ (x,0) \in A\}, \beta(A) = m_1\{y : \ (0,y) \in A\}, \quad \text{όπου } A \text{ Borel υποσύνολο του } \mathbb{R}^2.$$

Δείξτε ότι τα Borel μέτρα m_2, α, β είναι ανά δύο ιδιάζοντα μεταξύ τους.

Γιατί ορίσαμε τα μετρα α, β στη Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^2$ και όχι στη σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρησίμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$;

4. Έστω ολοκληρώσιμες $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και $f_n \to f$ σ.π. Δείξτε ότι $\int |f - f_n| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.

Υπόδειξη: Για τη σημαντική κατεύθυνση μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λήμμα του Fatou.

5. Αν μια συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι Lipschitz τότε είναι και απολύτως συνεχής. Δείξτε ότι το συμπέρασμα αυτό δεν προκύπτει αν η f είναι απλά Hölder-$\frac{1}{2}$, αν δηλ. ικανοποιεί την ανισότητα

$$|f(x) - f(y)| \le M|x-y|^{1/2}, \quad \text{όπου } M \text{ πεπερασμένη σταθερά.}$$

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να φτιάξετε μια f που είναι Hölder-$\frac{1}{2}$ αλλά όχι απολύτως συνεχής είναι να ορίσετε την f ως μια τμηματικά γραμμική συνάρτηση με κατάλληλο τριγωνικό γράφημα στα διαστήματα του τύπου $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. Όλες οι σημειώσεις και βιβλία πρέπει να είναι κλειστά. Όλες οι απαντήσεις σας θα πρέπει να είναι επαρκώς τεκμηριωμένες.

Καλή επιτυχία. – Μιχάλης Κολουντζάκης